قضیهٔ تقسیم

محمود داورزنی
کارشناس ارشد ریاضی و
دبیر ریاضی شهر ری

اشاره

قضیهٔ تقسیم به شکل $a=bq+r$ که در آن $a,b,q\in Z$ و $r\in N$ و $۰\le r<|b|$، در بسیاری از مسائل دیده می‌شود و تقریباً برای حل تمامی این مسائل باید دربارهٔ پارامترهای این قضیه شناخت کافی داشت. در این مقاله ابتدا این قضیه را اثبات می‌کنیم و سپس چند مسئله برای درک بیشتر آورده می‌شود.

از تقسیم یک عدد طبیعی بر عدد طبیعی دیگر و تعیین خارج‌قسمت و باقی‌مانده، هر دانش‌آموزی در محاسبات خود بارها استفاده می‌کند. البته می‌توانیم یک عدد صحیح منفی را نیز بر یک عدد ناصفر دیگر تقسیم کنیم. قضیهٔ مشهور زیر که به قضیه یا الگوریتم تقسیم معروف است، این ادعا را ثابت می‌کند.

قضیهٔ تقسیم: فرض کنید a و b دو عدد صحیح باشند و $b\neq ۰$. در این صورت اعداد صحیح و یکتای r و q وجود دارند، به‌طوری که: $a=bq+r$ ؛ $۰\le r<|b|$.

اثبات: دنبالهٔ زیر از اعداد صحیح را در نظر بگیرید:

$..., -۲|b|\ ,\ -|b|,\ ۰\ ,\ |b|,\ ۲|b|,...$

عدد صحیح a بین دو عضو متوالی این دنباله قرار دارد. به عبارت دیگر، عدد صحیح q وجود دارد به‌طوری که:

$q|b|\le a<(q+۱)|b|$ (۱)

قرار دهید: $r=a-q|b|$، بنابراین طبق نامساوی (۱): $۰\le r<|b|$. اگر: $b>۰$، سپس: $a=bq+r$ و $۰\le r<b$. و اگر $b<۰$، آن‌گاه: $a=b(-q)+r$ و $۰\le r<|b|$. بنابراین وجود r و q اثبات می‌شود.

برای اثبات یکتایی r و q، فرض کنید r' و q' دو عدد صحیح باشند که:

$a=bq'+r'\ ;\ ۰\le r'<|b|$

از مقایسهٔ این تساوی با تساوی بالا داریم:

$$\begin{cases}a=bq+r\\ a=bq'+r'\end{cases}\Rightarrow bq+r=bq'+r'\Rightarrow b(q-q')=r'-r$$

$$\Rightarrow |b||q-q'|=|r-r'| \qquad (۲)$$

با توجه به اینکه: $r'<|b|$ و $۰\le r$، پس: $|r-r'|<|b|$.

بنابراین تساوی (۲) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$|b||q-q'|=|r-r'|\Rightarrow |b||q-q'|<|b|\Rightarrow |q-q'|<۱$

و چون q و q' اعداد صحیح‌اند، باید: $q=q'$ و در ادامه داریم: $r=a-bq=a-bq'=r'$. بنابراین r و q یکتا هستند.

نکته: با توجه به قضیهٔ تقسیم، خارج‌قسمت تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b عبارت است از q که: $q=\left[\frac{a}{b}\right]$، زیرا:

$$a=bq+r\Rightarrow \frac{a}{b}=q+\frac{r}{b}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{a}{b}\right]=\left[q+\frac{r}{b}\right]=q+\left[\frac{r}{b}\right]=q+۰=q,\ (۰\le \frac{r}{b}<۱)$$

مسئلهٔ ۱. اگر $a=-۲۰$ و $b=۳$، خارج قسمت و باقی‌ماندهٔ تقسیم a را بر b پیدا کنید.

حل: ابتدا خارج‌قسمت را از نکتهٔ بالا پیدا می‌کنیم:

$$q=\left[\frac{a}{b}\right]=\left[-\frac{۲۰}{۳}\right]=-۷$$

و سپس باقی‌مانده را از فرمول $a=bq+r$ محاسبه می‌کنیم: $-۲۰=۳(-۷)+r\Rightarrow r=۱$.

مسئلهٔ ۲. در تقسیم عدد a بر عدد طبیعی b، باقی‌مانده ۱۷ و خارج‌قسمت ۲۵ است. اگر a مضرب ۶ باشد، کمترین مقدار ممکن برای a را به‌دست آورید.

حل: شکل مسئله را از قضیهٔ تقسیم می‌نویسیم:

$a=bq+r\Rightarrow a=۲۵b+۱۷;\ ۰\le ۱۷<b$

بنابراین برای تعیین مقادیر a می‌توانیم مقادیر b را از نامساوی بالا به‌ترتیب قرار دهیم: $b=۱۸,۱۹,۲۰,...$. برای اینکه a کوچک‌ترین عدد مضرب ۶ باشد، کافی است قرار دهیم: $b=۱۹$ و از آنجا داریم: $a=۲۵(۱۹)+۱۷=۴۹۲$.

مسئلهٔ ۳. در تقسیم عدد a بر ۵۹ باقی‌مانده برابر ۱۵ است. اگر ۵۰ واحد به مقسوم اضافه کنیم، باقی‌مانده و خارج‌قسمت چه تغییری می‌کنند؟

حل: شکل مسئله را قبل و بعد از انجام تغییرات، از قضیهٔ تقسیم می‌نویسیم:

$$\begin{cases} a = ۵۹q + ۱۵ \\ a + ۵۰ = ۵۹q + ۱۵ + ۵۰ = ۵۹q + ۶۵ \end{cases}$$

با توجه به اینکه ۶۵ نمی‌تواند باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a+۵۰ بر ۵۹ باشد، از عدد ۶۵، ۵۹ واحد کم می‌کنیم:

$$a + ۵۰ = ۵۹q + ۶۵ = \underbrace{۵۹q + ۵۹} + ۶ = ۵۹(q+۱) + ۶ = ۵۹q' + ۶$$

و چون: ۰≤۶<۵۹، پس تساوی بالا یعنی $a+۵۰=۵۹q'+۶$ می‌تواند شکلی از قضیهٔ تقسیم باشد. بنابراین خارج‌قسمت یک واحد اضافه شده و باقی‌مانده ۹ واحد کم شده است.

مسئلهٔ ۴. باقی‌ماندهٔ تقسیم a و b بر ۱۵ به‌ترتیب ۷ و ۴ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم ۳a−۷b بر ۱۵ را به‌دست آورید.

حل:

$$\begin{cases} a = ۱۵q + ۷ \\ b = ۱۵q' + ۴ \end{cases} \Rightarrow ۳a - ۷b = ۳(۱۵q + ۷) - ۷(۱۵q' + ۴)$$

$$= ۱۵(۳q - ۷q') - ۷ = ۱۵q'' - ۷$$

تساوی $۳a-۷b=۱۵q''-۷$ نمی‌تواند باقی‌مانده را از قضیهٔ تقسیم به‌دست آورد، زیرا باقی‌مانده هیچ‌گاه منفی نیست. برای اینکه باقی‌مانده مثبت شود، به عدد ۷- مضارب ۱۵ را اضافه و کم می‌کنیم:

$$۳a - ۷b = ۱۵q'' - ۷ = \underbrace{۱۵q'' - ۱۵} + ۱۵ - ۷$$

$$= ۱۵(q'' - ۱) + ۸ = ۱۵q_۱ + ۸$$

پس باقی‌ماندهٔ ۳a−۷b بر ۱۵ برابر ۸ است.

مسئلهٔ ۵. در تقسیم a بر b باقی‌مانده ۶۵ و خارج‌قسمت ۱۷ است. حداکثر چند واحد می‌توانید به مقسوم‌علیه اضافه کنید بدون آنکه مقسوم و خارج‌قسمت تغییر کنند؟

حل: صورت مسئله را قبل و بعد از تغییرات به شکل قضیهٔ تقسیم می‌نویسیم:

$$\begin{cases} a = ۱۷b + ۶۵ \\ a = ۱۷(b + x) + r \end{cases}$$

اکنون باید بیشترین مقدار ممکن برای x را به‌دست آوریم. از اختلاف این دو تساوی داریم:

$$۰ = ۱۷x + r - ۶۵ \Rightarrow r = ۶۵ - ۱۷x \overset{r\geq ۰}{\Rightarrow} ۶۵ - ۱۷x \geq ۰$$

$$\Rightarrow x \leq \frac{۶۵}{۱۸}$$

و بنابراین بیشترین مقدار x برابر است با: x=۳.

مسئلهٔ ۶. باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۵ و ۳ به ترتیب برابر با ۴ و ۱ است. باقی‌مانده تقسیم a بر ۱۵ را به دست آورید.

حل: شکل قضیهٔ تقسیم را برای تقسیم a بر ۵ و ۳ می‌نویسیم:

$$\begin{cases} a = ۵q + ۴ \Rightarrow ۳a = ۱۵q + ۱۲ \\ a = ۳q' + ۱ \Rightarrow ۵a = ۱۵q' + ۵ \end{cases} \Rightarrow ۵a - ۳a = ۱۵(q' - q) - ۷$$

$$\Rightarrow ۲a = ۱۵q'' - ۷$$

برای رسیدن به جواب با کمک قضیهٔ تقسیم، باید در تساوی بالا ۲a را به a تبدیل کنیم.

برای این‌کار ابتدا ۷- را به یک عدد زوج تبدیل می‌کنیم:

$$۲a = ۱۵q'' - ۷ = ۱۵q'' - ۱۵ + ۸ = ۱۵(q'' - ۱) + ۸$$

$$\Rightarrow ۲a = ۱۵q_۱ + ۸$$

در تساوی بالا، ۲a و ۸ زوج هستند، پس $۱۵q_۱$ و در نتیجه $q_۱$ باید زوج باشد:

$$۲a = ۱۵(۲k) + ۸ = ۳۰k + ۸ \overset{\div ۲}{\Rightarrow} a = ۱۵k + ۴$$

یعنی باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۱۵، ۴ است.

مسئلهٔ ۷. در تقسیم عدد طبیعی سه رقمی a بر عدد طبیعی b، خارج قسمت ۲۱ و باقی‌مانده ۳۷ است. چند عضو از مجموعهٔ جواب‌های a مضرب ۵ است؟

حل: مسئله را به شکل قضیهٔ تقسیم می‌نویسیم:

a=۲۱b+۳۷; ۳۷<b

با توجه به اینکه a<۱۰۰۰ داریم:

$$۲۱b + ۳۷ < ۱۰۰۰ \Rightarrow ۲۱b < ۹۶۳ \Rightarrow b < \frac{۹۶۳}{۲۱} \Rightarrow b < ۴۵/۶$$

پس: ۳۷<b<۴۵/۶. اکنون باید تمام مقادیر ممکن برای b را در تساوی a=۲۱b+۳۷ قرار داد تا همهٔ اعداد مضرب ۵ برای a به‌دست آید. البته با توجه به اینکه: a=(۲۰+۱)b+۳۷، بنابراین b باید به شکل ۵k+۳ باشد (رقم یکان a باید مضرب ۵ باشد) و از نامساوی ۳۷<b<۴۵/۶ فقط دو عدد ۳۸ و ۴۳ به شکل ۵k+۳ هستند.